LES RESSOURCES NUMÉRIQUES POUR LES MATHÉMATIQUES

DES EXEMPLES DE QUESTIONS EN MATHÉMATIQUES

Question 1. « Pourquoi les barycentres sont-ils utiles en géométrie ? »

Quel plan détaillé ?

EXEMPLE DE PLAN DÉTAILLÉ

Introduction

- Étymologie : des mots grecs *barus*, lourd, et *kendros*, centre, pointe du compas : centre de masse. Il est particulièrement utilisé en Physique comme point d'application des forces.
- Nous explorerons au travers de quelques exemples à quoi ils peuvent servir en géométrie.

Partie 1. Démontrer que des droites sont concourantes

1. Définition
2. Placer un barycentre de deux points
3. Placer un barycentre de trois points ou plus

   Application aux points de concours

Partie 2. Trouver un ensemble de points vérifiant une égalité de longueurs

1. Simplification vectorielle

$$\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \alpha_3\overrightarrow{A_3M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM} = (\alpha_1 + .. + \alpha_n)\overrightarrow{GM}$$

2. Ensemble de points tels que

$$MA = kMB \ (k \text{ réel positif})$$

3. Ensembles des points tels que

$$\left\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

Partie 3. Trouver un ensemble de points vérifiant une condition sur les carrés de longueurs

1. Simplifier une somme de carrés pondérés
2. Ensemble de points tels que

$$3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = k$$

Conclusion

- Comme nous venons de le voir, les barycentres sont essentiels pour la résolution de nombreux problèmes de géométrie.
- Au-delà de la géométrie, ils sont utiles en statistiques (la moyenne est un barycentre).
- L'intérêt du barycentre dépasse le domaine des Mathématiques. Ainsi, par exemple, en Physique, ils sont essentiels pour déterminer la position des centres de gravité.

Quel support écrit ?

EXEMPLE DE SUPPORT ÉCRIT : PRINCIPALES ÉQUATIONS

Introduction

• Étymologie : des mots grecs *barus*, lourd, et *kendros*, centre, pointe du compas : centre de masse. Il est particulièrement utilisé en Physique comme point d'application des forces.

Partie 1. Démontrer que des droites sont concourantes

1. Définition

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$

et $A_1, A_1, \ldots, A_1$, n points, on appelle barycentre du système de points pondérés, l'unique

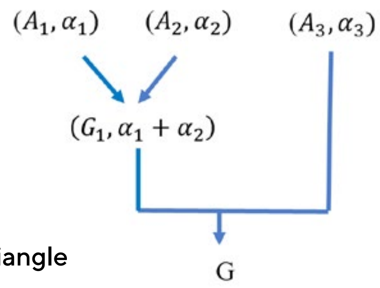
point G tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \alpha_3\overrightarrow{GA_3} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

2. Placer un barycentre de deux points : $\overrightarrow{A_1G} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\overrightarrow{A_1A_2}$

Exemple : l'isobarycentre est le milieu

3. Placer un barycentre de trois points ou plus

> Théorème d'associativité :



→ Application : les médianes d'un triangle sont courantes.

Partie 2. Trouver un ensemble de points vérifiant une égalité de longueurs

1. Simplification vectorielle

$$\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \alpha_3\overrightarrow{A_3M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM} = (\alpha_1 + .. + \alpha_n)\overrightarrow{GM}$$

2. Ensemble de points tels que $MA = kMB$ (k réel positif)

• $k = 1$ Plan médiateur

• $k \neq 1 \; MA = kMB \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$: *On reconnaît une sphère*

Avec $G_1 \sim (A\,;1), (B\,;k);\; G_2 \sim (A\,;1), (B\,;\text{-}k)$

3. Ensembles des points tels que $\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA}\text{-}2\overrightarrow{MC}\|$

$\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA}\text{-}2\overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow 7MG_1 = MG_1$: *On se ramène au problème 2*

$G_1 \sim (A\,;5), (B\,;2);\; G_2 \sim (A\,;1), (B\,;-2)$

Partie 3. Trouver un ensemble de points vérifiant une condition sur les carrés de longueurs

1. Simplifier une somme de carrés pondérés

$$3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = 3GA^2 + 5GB^2 + 2GC^2 + 10MG^2$$

$$G \sim (A\,;3), (B\,;5), (C\,;2)$$

2. Ensemble de points tels que $3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = k$

Applications : $3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = k'$: *sphère ou* $\emptyset$

Question 2. « Quelle est la formule de calcul du volume d'un tonneau ? »

Quel plan détaillé ?

EXEMPLE DE PLAN DÉTAILLÉ

Introduction

- Historiquement, on trouve différentes formules pour calculer ce volume.
- Comprendre quelle est la bonne formule parmi celles-ci.

Partie 1. Calcul d'un volume

1. Formule générale
2. Le cas particulier des solides de révolution

Partie 2. Quel profil pour le tonneau ?

1. Tronc de cône

a. Expression de la fonction associée

b. Calcul du volume

2. Tonneau elliptique

a. Expression de la fonction associée

b. Calcul du volume

3. Tonneau parabolique

a. Expression de la fonction associée

b. Calcul du volume

Partie 3. Comparaison

Conclusion

- La réponse à notre question dépend du profil du tonneau.
- Il existe encore bien d'autres formules en approchant le tonneau à un cylindre. La question est alors de trouver le bon rayon intermédiaire.
- Cette question fait apparaître la démarche de modélisation. Un vrai tonneau n'a sans doute aucune des formes citées. Néanmoins ces formules permettent d'avoir une estimation rapide de la contenance du tonneau. La mesure de l'écart entre le modèle et la réalité est alors indispensable.

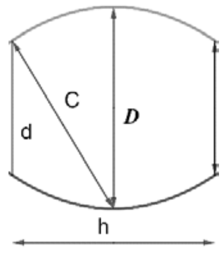
Quel support écrit ?

EXEMPLE DE SUPPORT ÉCRIT : DIFFÉRENTES FIGURES ET FORMULES UTILES

Introduction

- Le volume d'un tonneau peut se déterminer en mesurant sa contenance.
- Historiquement, on trouve différentes formules pour calculer ce volume :

Kepler	$\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$	Formule 3	$\frac{\pi h}{15}(8R^2 + 4rR + 3r^2)$
Oughtreg	$\frac{\pi h}{3}(R^2 + 2r^2)$	Formule des Douanes	$0{,}625C^3$



Partie 1. Calcul d'un volume

Formule générale

$V = \int_a^b s(z)dzV = \int_a^b s(z)dz$

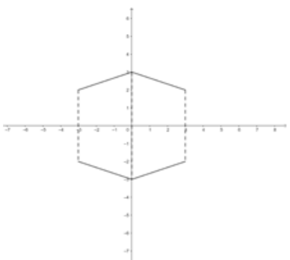
Solides de révolution

$V = \pi \int_a^b f^2(z)dzV = \pi \int_a^b f^2(z)dz$

Exemple : Sphère : $V = \pi \int_{-R}^{R}(R^2-z^2)dz = \left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$

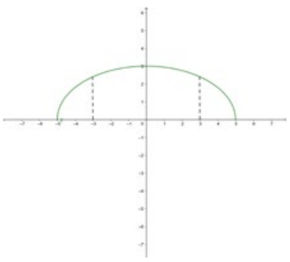
Partie 2. Quel profil pour le tonneau ?

1. Tronc de cône :



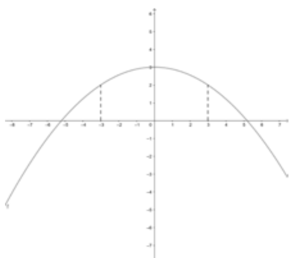
En remplaçant f par une fonction affine par morceaux, on retrouve la formule de Kepler.

2. Tonneau elliptique



En remplaçant f par la courbe représentative d'une ellipse, on retrouve la formule de Oughtreg.

3. Tonneau parabolique



En remplaçant f par une fonction du second degré, on retrouve la formule 3.

Partie 3. Comparaison sur un tonneau classique (R = 31cm, r = 26cm, h = 90cm)

Formule de Kepler : 230 l
Formule de Oughtreg : 218 l
Formule parabolique : 244 l
Formule des douanes : 239 l

Question 3. « Un événement de probabilité infiniment faible peut-il être réalisé ? »

Quel plan détaillé ?

EXEMPLE DE PLAN DÉTAILLÉ

Introduction

• Cette question philosophique a été illustrée par Borel en 1909 en prenant l'image d'un singe dactylographe.
• Un singe qui tape au hasard sur le clavier d'une machine à écrire pourra écrire tous les livres de la Bibliothèque nationale de France avec une probabilité égale à 1.
• Bien entendu, ces singes ne sont pas des singes réels, mais la métaphore d'une machine qui produirait des lettres dans un ordre aléatoire, comme un ordinateur.
• Nous nous efforcerons de comprendre ce propos à l'aide d'un calcul de probabilité. Un clavier comporte 50 touches. On souhaite reconnaître le mot *ALÉATOIRE*.

Partie 1. Loi binomiale

1. La problématique du singe savant peut-elle s'apparenter à une loi binomiale ?
2. Principales caractéristiques d'une loi binomiale
3. Mise en contexte sur notre problème

Partie 2. Loi géométrique

1. Qu'est-ce que la loi géométrique ?
2. Loi de probabilité de la loi géométrique et espérance

Partie 3. Application à notre exemple

1. Va-t-on observer le mot *ALÉATOIRE* ?
2. Combien de temps faut-il ?

Conclusion

• Ce problème illustre que tout événement de probabilités non nulle sera réalisé avec probabilité 1. Ainsi, gagner au loto a une probabilité très faible mais peut être observé. Cependant, le calcul de probabilité autorise aussi la non-réalisation. Pour, le problème du singe dactylographe, même si l'événement est possible en théorie, le temps d'attente avant la réalisation est très long. L'événement risque de ne pas être observé à l'échelle humaine.
• Avec la rapidité des ordinateurs actuels et les possibilités de collaboration, la notion de « temps long » est de plus en plus relative.
• La question est alors de savoir à partir de quelle valeur une probabilité peut être considérée comme négligeable.

Quel support écrit ?

EXEMPLE DE SUPPORT ÉCRIT : RAPPEL DES FORMULES QUI PERMETTENT DE DÉROULER LE RAISONNEMENT

Introduction

• Cette question philosophique a été illustrée par Borel en 1909 en prenant l'image d'un singe dactylographe.

• Un singe qui tape au hasard sur le clavier d'une machine à écrire pourra écrire tous les livres de la Bibliothèque nationale de France avec une probabilité égale à 1.

• Nous nous efforcerons de comprendre ce propos à l'aide d'un calcul de probabilité : un clavier comporte 50 touches. On souhaite reconnaître le mot *ALÉATOIRE*.

Partie 1. Loi binomiale

Mise en contexte des hypothèses :

• Expérience à deux issues, qu'on peut assimiler à un tirage de Bernoulli :

- frapper 9 lettres au hasard puis observer si le mot *ALÉATOIRE* est écrit ;

- le succès - reconnaître le mot ALÉATOIRE - a pour probabilité $\left(\frac{1}{50}\right)^9$

• L'expérience est répétée n fois.

• Indépendance : afin d'assurer l'indépendance, on considérera un modèle simplifié où l'on sépare les expériences par paquets de 9 lettres

CEZHGBATUALÉATOIRE est accepté, ALÉATOIRETYDXWOPLM est accepté,
mais CHALÉATOIRENTTSXWP est rejeté.

Le mot *ALÉATOIRE* n'est pas reconnu s'il est à cheval entre deux paquets de 9 lettres (voir exemple ci-dessus) : 1 paquet de 9 lettres en rouge, 1 paquet de 9 lettres en vert. Le mot *ALÉATOIRE* est reconnu s'il est tout en rouge ou tout en vert mais pas s'il est de deux couleurs.

Le nombre le succès X suit alors une loi binomiale de paramètres n et $\left(\frac{1}{50}\right)^9$.

Caractéristiques :

• $P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{50}\right)^{9k}\left(1-\left(\frac{1}{50}\right)^9\right)^{n\text{-}k}$

• $P(X=0)=\left(1-\left(\frac{1}{50}\right)^9\right)^n$

Partie 2. Loi géométrique

T = temps du premier succès d'une série d'épreuves de Bernoulli de paramètre p

Ici : $p=\left(\frac{1}{50}\right)^9$

Caractéristiques :

• $P(T=k)=(1-p)^{k\text{-}1}p$

• $P(T\leq k)=1-(1-p)^k$

• $E(T)=\frac{1}{p}$

Partie 3. Applications au problème

• $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X=0)=0 \; et \; \lim\limits_{k\to+\infty} P(T\leq k)=1$:

Nous sommes donc certains que le mot *ALÉATOIRE* finira par être écrit.

• $E(T)=50^9$ Ainsi, s'il faut une seconde pour taper neuf lettres le mot *ALÉATOIRE* sera écrit en moyenne après 50^9 secondes soit environ 62 millions d'années.

Il est peu probable que le « singe », seul, parvienne au bout. Cependant, si l'on fait collaborer quelques millions d'ordinateurs, ce temps peut devenir accessible.

Question 4. « La modélisation d'une épidémie permet-elle de prédire l'évolution d'une maladie ? »

Quel plan détaillé ?

EXEMPLE DE PLAN DÉTAILLÉ

Introduction

• Lors d'épidémies récentes, on a vu émerger l'utilisation de calculs mathématiques pour prévoir l'évolution, voire contrôler une épidémie.
• Comment modélise-t-on ? Comment trouve-t-on les solutions mathématiques ? Les modèles obtenus sont-ils fiables ?
• Nous allons, au travers deux exemples, comprendre comment se construit une modélisation mathématique.

Partie 1. Le modèle SIS

1. Description du modèle
2. Traduction mathématique par une équation différentielle
3. Résolution mathématique du problème
   a. Recherche d'état d'équilibre
   Théorème 1 : « Le système admet deux états d'équilibre »
   Éléments de démonstration
   b. Résolution
   Théorème 2
   Théorème 3 : Expression de S et I
   c. Évolution à long terme de la maladie
   Théorème 4
4. Limites du modèle

Partie 2. Le modèle SIR

1. Description du modèle
2. Traduction mathématique
3. Étude des variations de S et I
   Théorème 5
   Éléments de démonstration
4. Approximation par la méthode d'Euler
5. Limites du modèle

Conclusion

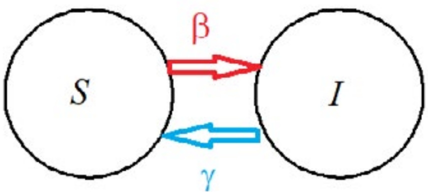
• Avant de prévoir, les modèles permettent de comprendre l'évolution des épidémies.
• La modélisation a montré que l'évolution dépend de la valeur de certains paramètres. Cependant, pour des maladies nouvelles, ces valeurs ne sont pas connues, ce qui laisse une incertitude.
• Comme nous l'avons vu dans des épidémies récentes, cette compréhension peut permettre de contrôler l'évolution en modifiant la valeur ces paramètres.
• Les modèles ne sont jamais le reflet exact de la réalité mais une simplification. On peut les enrichir pour les rendre plus proches de la réalité mais cela complexifie la résolution mathématique. Il s'agit donc de trouver un bon compromis et de savoir s'appuyer sur les méthodes numériques d'approximation des solutions.

Quel support écrit ?

EXEMPLE DE SUPPORT ÉCRIT

Le modèle SIS

Traduction mathématique par une équation différentielle



β = taux de transmission

λ = durée de l'infection

$\gamma = \frac{1}{\lambda}$ = taux de guérison

S = part de la population saine

I = part de la population infectée

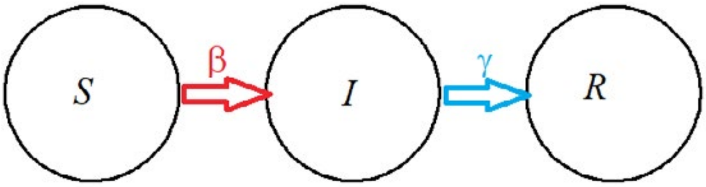
Pas de mortalité. La population totale est constante : $S + I = 1$

$$\boxed{\begin{cases} S' = -\beta IS + \gamma I & (1) \\ I' = \beta IS - \gamma I & (2) \\ S + I = 1 & (3) \end{cases}}$$

Le modèle SIR

Traduction mathématique

S = population saine, I = population infectée, R = population rétablie. Pas de mortalité.



β = taux de transmission

λ = durée de l'infection

$\gamma = \frac{1}{\lambda}$ = taux de guérison

Pas de mortalité. La population totale reste constante.

S = part de la population saine

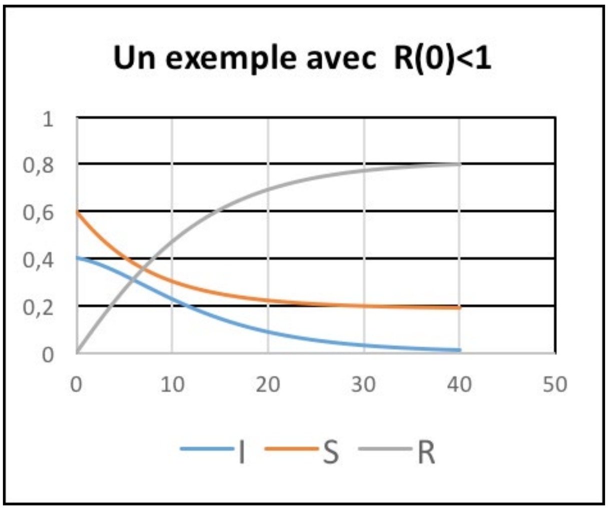
I = part de la population infectée

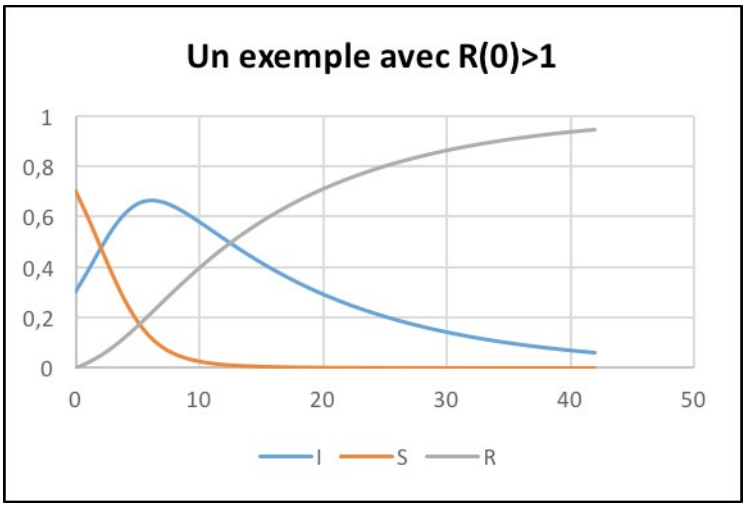
R = part de la population guérie

$S + I + R = 1$

$$\boxed{\begin{cases} S' = -\beta IS & (1) \\ I' = \beta IS - \gamma I & (2) \\ R' = \gamma I & (3) \end{cases}}$$

On observe deux grandes situations (extinction et pic épidémique) assez semblables à celles observées dans les épidémies de grippe avec les mêmes seuils que dans le théorème 5 suivant les valeurs de $R(0)$.





Quel développement ?

EXEMPLE DE DÉVELOPPEMENT

Introduction

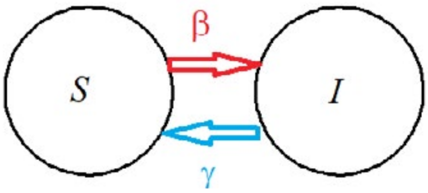
- Lors d'épidémies récentes, on a vu émerger l'utilisation de calculs mathématiques pour prévoir l'évolution, voire contrôler une épidémie.
- Comment modélise-t-on ? Comment trouve-t-on les solutions mathématiques ? Les modèles obtenus sont-ils fiables ?
- Nous allons, au travers deux exemples, comprendre comment se construit une modélisation mathématique.

Partie 1. Le modèle SIS

1. Description du modèle

- Il s'agit d'un modèle à deux états : sains ou infectés.
- Un individu peut être infecté puis guérir.
- Une réinfection est possible.
- On ne tient pas compte de la natalité ou des décès. La taille de la population reste constante.

2. Traduction mathématique par une équation différentielle



β = taux de transmission

λ = durée de l'infection

$\gamma = \frac{1}{\lambda}$ = taux de guérison

S = part de la population saine

I = part de la population infectée

Pas de mortalité. La population totale est constante : $S + I = 1$

$$\boxed{\begin{cases} S' = -\beta IS + \gamma I & (1) \\ I' = \beta IS - \gamma I & (2) \\ S + I = 1 & (3) \end{cases}}$$

3. Résolution mathématique du problème

a. Recherche d'état d'équilibre

Théorème 1 : « Le système admet deux états d'équilibre »

- $S = \frac{\gamma}{\beta}$ et $I = \frac{\beta - \gamma}{\beta}$
- S = 1 et I = 0

Éléments de démonstration :

Les états d'équilibre correspondent à $S' = 0$ et $I' = 0$

b. Résolution

Théorème 2 :

Soit $u = \frac{1}{I}$

u est solution de l'équation différentielle:

$u' + (\beta - \gamma) \times u = \beta$

Théorème 3 : Expression de S et I

Soit $S(t) = 1 - \frac{\beta\text{-}\gamma}{K(\beta\text{-}\gamma)e^{-(\beta\text{-}\gamma)t}+\beta}$ et $I(t) = \frac{\beta\text{-}\gamma}{K(\beta\text{-}\gamma)e^{-(\beta\text{-}\gamma)t}+\beta}$

Avec $K = \frac{1}{I(0)} - \frac{\beta}{\beta\text{-}\gamma}$

c. Évolution à long terme de la maladie

Théorème 4 :

(1) Si $\beta\text{-}\gamma > 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} I(t) = \frac{\beta\text{-}\gamma}{\beta}$; $\lim_{x\to+\infty} S(t) = \frac{\gamma}{\beta}$

On arrive au premier état d'équilibre du théorème 1 : cohabitation entre les malades et sains.

(2) Si $\beta\text{-}\gamma < 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} I(t) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} S(t) = 1$

On arrive au deuxième état équilibre du théorème 1 : la maladie s'éteint.

4. Limites du modèle

- S'applique à des maladies non létales qui ne conduisent pas à une immunité.
- Ce modèle ne tient pas compte de la natalité et mortalité ce qui peut être gênant à long terme.

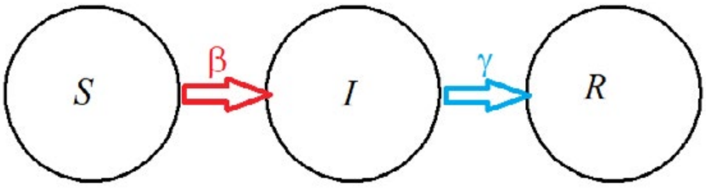
Partie 2. Le modèle SIR

1. Description du modèle

- Il s'agit d'un modèle à trois états : sains, infectés, rétablis.
- Une réinfection n'est pas possible.
- On ne tient pas compte de la natalité ou des décès.
- La taille de la population reste constante.
- Pas de mortalité ni de natalité.

2. Traduction mathématique

S = population saine, I = population infectée, R = population rétablie. Pas de mortalité.



β = taux de transmission

λ = durée de l'infection

$\gamma = \frac{1}{\lambda}$ = taux de guérison

- Pas de mortalité. La population totale reste constante
- S = part de la population saine
- I = part de la population infectée
- R = part de la population guérie
- $S + I + R = 1$

$$\boxed{\begin{cases} S' = -\beta IS & (1) \\ I' = \beta IS\text{-}\gamma I & (2) \\ R' = \gamma I & (3) \end{cases}}$$

3. Étude des variations de S et I

Théorème 5 :

(1) S est décroissante

(2) On pose $R(t) = \frac{S(t)\beta}{\gamma}$

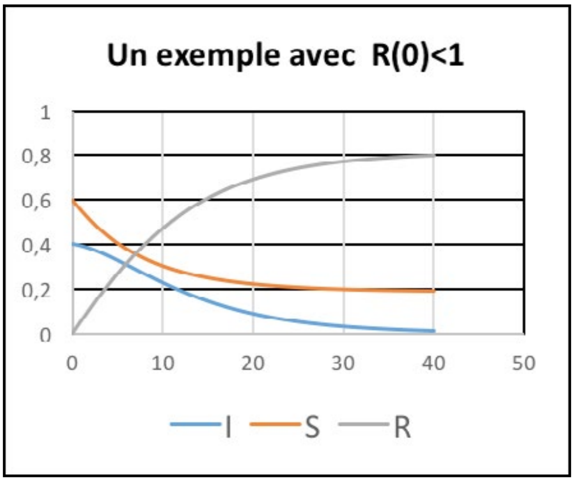
- Si $Si\ R(0) \leq 1$: I est strictement décroissante
- Si $R(0) \geq 1$: $I'(0) > 0$: $I\ sera\ \ croissante\ jusqu'à\ ce\ que\ S = \frac{\gamma}{\beta}$

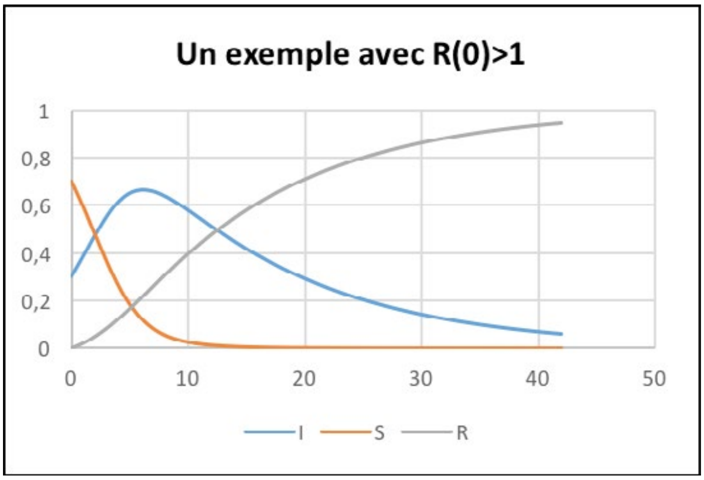
Éléments de démonstration :

(1) Pour tout t : $S'(t) = -\beta I(t)S(t) < 0$: S est donc décroissante.
(2) $I' = \beta IS - \gamma I$

- En remplaçant I par $I = \frac{-S'}{\beta S}$, il vient $I' = -S' - \gamma \frac{-S'}{\beta S} = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta S}\right) S'$
- Comme $S' < 0$: I' est du signe de $1 - \frac{\gamma}{\beta S(t)} = 1 - \frac{1}{R(t)}$

4. Approximation par la méthode d'Euler
La résolution mathématique complète est complexe. On peut néanmoins obtenir une approximation algorithmique des solutions à l'aide de la méthode d'Euler.
On observe deux grandes situations (extinction et pic épidémique) assez semblables à celles observées dans les épidémies de grippe avec les mêmes seuils que dans le théorème 5 suivant les valeurs de $R(0)$.





5. Limites du modèle
Ce modèle ne tient pas compte de la natalité et mortalité, ce qui peut être gênant à long terme.

Conclusion

- Avant de prévoir, les modèles permettent de comprendre l'évolution des épidémies.
- La modélisation a montré que l'évolution dépend de la valeur de certains paramètres. Cependant, pour des maladies nouvelles, ces valeurs ne sont pas connues, ce qui laisse une incertitude.
- Comme nous l'avons vu dans des épidémies récentes, cette compréhension peut permettre de contrôler l'évolution en modifiant la valeur ces paramètres.
- Les modèles ne sont jamais le reflet exact de la réalité mais une simplification. On peut les enrichir pour les rendre plus proches de la réalité mais cela complexifie la résolution mathématique. Il s'agit donc de trouver un bon compromis et de savoir s'appuyer sur les méthodes numériques d'approximation des solutions.

LISTE NON EXHAUSTIVE DE SOURCES PROPRES À LA SPÉCIALITÉ

Sites Internet

• ChronoMath chronomath.com
QUOI ? Histoire des mathématiques : mathématiciens, périodes, et concepts.

• M@ths et tiques maths-et-tiques.fr
QUOI ? Les pages « histoires » et « curiosités mathématiques » pourront donner des idées de sujets ou de questions.
Des ressources de cours très complètes si vous vous intéressez à un thème pas encore abordé en classe.

• Bibm@ath bibmath.net
QUOI ? Vous trouverez une biographie des mathématiciens.
Des dossiers sur les utilisations diverses des mathématiques vous donneront des idées de problématiques.

Sources imprimées

• Magazine *Tangente* (le magazine est payant, mais vos CDI sont généralement abonnés).
• Manuels de cours.

LISTE DES THÈMES AU PROGRAMME

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- Analyse combinatoire (dénombrement)
- Géométrie vectorielle : décompositions, orthogonalité, distances
- Dans le plan (première)
- Dans l'espace (terminale)

ANALYSE

- Suites
- Fonctions
- Limites
- Continuité
- Dérivation, convexité
- Primitives, intégrales, équations différentielles

PROBABILITÉS

- Probabilités simples et conditionnelles (première)
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale
- Concentration, loi des grands nombres

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

- Variables et instructions élémentaires
- Boucles et tests
- Fonctions
- Listes